

On considère la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{e} \\ \text{pour tout entier } n \geq 1, u_{n+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n \end{cases}$$

1.
  - Pour  $n = 1$  :  $u_2 = u_{1+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1}\right) u_1 = \frac{1}{e} (2) \frac{1}{e} = \frac{2}{e^2}$
  - Pour  $n = 2$  :  $u_3 = u_{2+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{2}\right) u_2 = \frac{1}{e} \left(\frac{3}{2}\right) \frac{2}{e^2} = \frac{3}{e^3}$
2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel  $n$  donné, affiche le terme  $u_n$ . On complète les lignes  $L_2$  et  $L_4$  de ce programme.

$L_1$	def suite(n):
$L_2$	u = 1/e
$L_3$	for i in range(1, n):
$L_4$	u = 1/e*(1+1/i)*u
$L_5$	return u

3. On admet que tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont strictement positifs.

a.  $n \geq 1 \implies \frac{1}{n} \leq 1 \implies 1 + \frac{1}{n} \leq 2$  donc  $1 + \frac{1}{n} \leq e$

b.  $1 + \frac{1}{n} \leq e$  donc  $\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$

Or pour tout  $n$ ,  $u_n > 0$ , donc :  $\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n \leq u_n$  c'est-à-dire  $u_{n+1} \leq u_n$ .

La suite  $(u_n)$  est décroissante.

- c. Pour tout  $n$ ,  $u_n > 0$  donc la suite  $(u_n)$  est minorée par 0.

On a démontré que cette suite était décroissante donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente.

4. a. Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $u_n = \frac{n}{e^n}$ .

• **Initialisation**

Pour  $n = 1$  :  $u_1 = \frac{1}{e}$  et  $\frac{n}{e^n} = \frac{1}{e}$

Donc la propriété est vraie au rang  $n = 1$ .

• **Hérédité**

On suppose que la propriété est vraie au rang  $n \geq 1$ ; c'est l'hypothèse de récurrence.

$u_{n+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{n}{e^n} = \frac{n+1}{e^{n+1}}$  donc la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 1, elle est héréditaire pour tout  $n \geq 1$ , donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

On a donc démontré que, pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $u_n = \frac{n}{e^n}$ .

**b.** On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$  et donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .